Ⅲ 이차함수

1. 이차함수와 그 그래프
2. 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프

분수대 물줄기의 궤적을 표현하려면

분수대에서 뿜어져 나오는 물줄기, 밤하늘을 수놓는 불꽃, 공중을 날아가는 야구공은 모두 비슷한 모양을 갖는 곡선을 그립니다. 이때 물줄기의 물방울, 불꽃, 야구공의 높이를 시간에 대한 함수로 생각할 수 있기 때문에, 움직이는 물체의 궤적을 나타내는 곡선을 함수의 그래프로 이해할 수 있습니다.

이탈리아의 천문학자 갈릴레이(Galilei, G., 1564~1642)는 낙하하는 물체를, 영국의 수학자 뉴턴(Newton, I., 1642~1727)은 공중으로 쏘아 올린 물체를 탐구하여 이들의 궤적이 시간에 대한 이차식으로 나타내어지는 함수의 그래프임을 확인했다고 합니다.

한편, 교량의 아치와 롤러코스터의 경로를 설계하는 데도 이차식으로 나타내어지는 함수를 이용한다고 합니다.

(출처: Pickover, C. A., 『The Physics Book』 / 안 굴베리, 『수학百科』, 권창욱, 홍대식 역)

이 단원에서는

이차함수의 의미를 이해하고, 그 그래프의 성질을 배웁니다.

1 이차함수와 그 그래프

거문고나 기타와 같은 현악기는 몸체에 고정시켜 놓은 현(줄)을 퉁겨서 소리를 내는 악기입니다.

퉁겨진 현은 압축과 팽창에 의해 공기의 압력을 변화시키는데, 이러한 압력의 차이에서 생기는 진동이 전달되면서 파동을 만들어 냅니다. 또한 현을 퉁길 때 양쪽 끝 방향으로 현을 따라 당겨지는 힘을 '장력(張力, tension)'이라고 하는데, 장력은 파동의 속력의 제곱에 비례한다는 것이 알려져 있습니다. 즉, 현의 장력 T는 파동의 속력 v에 대하여

$T=kv^2$ (단, k는 현의 단위 길이당 질량을 나타내는 일정한 값이다.)

과 같은 이차식으로 나타내어집니다.

이와 같이 현악기로 소리를 만들어 내는 원리에서 이차식으로 나타내어지는 함수를 찾아볼 수 있습니다.

(출처: 동아사이언스, 『과학동아』)

이 단원에서는 이차함수의 의미를 이해하고, 그 그래프를 그리는 방법에 대하여 알아봅니다.

◀ 김홍도(金弘道, 1745~1806?)가 1784년에 그린 「단원도」에 나타나는 거문고를 연주하는 모습

준비학습

• 이차식

1 다음 중에서 이차식을 모두 찾으시오.

$x(x-1)$, $(x-2)^2-x^2$, $(x+3)(x-3)$

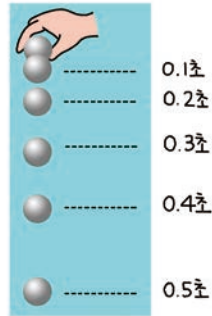
• 함숫값

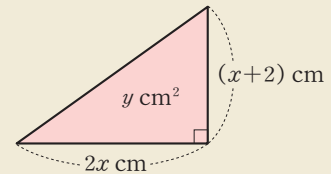
2 일차함수 $f(x)=2x-3$에 대하여 다음 함숫값을 구하시오.

(1) $f\left(\frac{1}{2}\right)$ (2) $f(-1)$

이차함수

학습 목표 • 이차함수의 의미를 이해한다.

다가서기

이차함수란 무엇인가?

오른쪽 그림과 같이 밑변의 길이가 $2x$ cm이고 높이가 $(x+2)$ cm인 직각삼각형의 넓이를 y cm^{2}라고 하자.

1. y를 x에 대한 식으로 나타내 보자.

2. y는 x의 함수인지 말해 보자.

위의 생각 열기에서 y를 x에 대한 식으로 나타내면

$$y=\frac{1}{2}\times 2x\times(x+2)=x^2+2x$$

와 같이 y가 x에 대한 이차식으로 나타내어진다. 이때 x의 값이 정해짐에 따라 y의 값이 오직 하나씩 정해지므로 y는 x의 함수이다.

일반적으로 함수 $y=f(x)$에서

$$y=ax^2+bx+c\ (\text{단, } a,\ b,\ c\text{는 수, } a\neq 0)$$

와 같이 y가 x에 대한 이차식으로 나타내어질 때, 이 함수 $y=f(x)$를 x에 대한 **이차함수**라고 한다.

보기 ① $y=x^2$, $y=-2x^2+1$, $y=x^2-5x-3$은 x에 대한 이차함수이다.

② $y=4x-1$과 $y=\frac{1}{x}$은 x에 대한 이차함수가 아니다.

문제 1 다음에서 y가 x에 대한 이차함수인 것을 모두 찾으시오.

(1) $y=-x+5$　　(2) $y=2x-3x^2$

(3) $y=(x+4)^2$　　(4) $y=(x+6)^2-x^2$

문제 2 다음에서 y를 x에 대한 식으로 나타내고, 이차함수인 것을 모두 말하시오.

(1) 반지름의 길이가 x cm인 원의 둘레의 길이 y cm

(2) 한 모서리의 길이가 x cm인 정육면체의 겉넓이 y cm^2

(3) 자동차가 시속 x km로 3시간 동안 달린 거리 y km

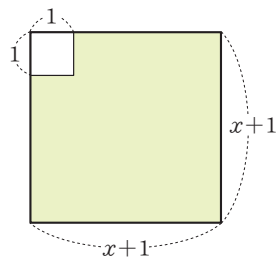
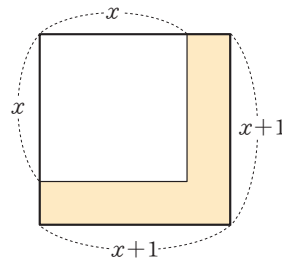
(4) x각형의 대각선의 개수 y

문제 3 이차함수 $f(x)=2x^2-4x+1$에 대하여 다음 함숫값을 구하시오.

(1) $f(0)$　　(2) $f(1)$　　(3) $f(-1)$

생각이 크는 수학

의사소통

[그림 1]은 한 변의 길이가 $x+1$인 정사각형에서 한 변의 길이가 1인 정사각형을 잘라 낸 것이고, [그림 2]는 한 변의 길이가 $x+1$인 정사각형에서 한 변의 길이가 x인 정사각형을 잘라 낸 것이다.

[그림 1]

[그림 2]

▶ 위의 그림에서 색칠한 부분의 넓이를 y라고 할 때, 다음 대화에서 잘못 말한 사람을 찾고, 그 이유를 말해 보자.

윤아: [그림 1]에서 색칠한 부분의 넓이 y는 x에 대한 이차함수야.

지훈: 그럼 [그림 2]에서도 색칠한 부분의 넓이가 y이니까 y는 x에 대한 이차함수가 되겠구나.

문제 해결 의사소통

소수를 만들어 내는 이차함수

▲ 오일러

옛날부터 소수(素數, prime number)의 중요성을 알게 된 수학자들은 큰 소수를 찾아 내려고 애를 썼는데, 특히 소수를 만들어낼 수 있는 함수를 찾는 데 노력을 기울였다.

그중의 한 사람인 스위스의 수학자 오일러(Euler, L., 1707~1783)는 1772년에 이차함수

$$f(x)=x^2+x+41$$

에서 0부터 39까지의 정수 x에 대한 함숫값 $f(x)$가 모두 소수가 된다는 사실을 발견했다. 이렇게 만들어지는 소수를 '오일러의 소수'라고 한다.

또 이차함수

$$g(x)=x^2+x+17$$

에서는 0부터 16까지의 정수 x에 대한 함숫값 $g(x)$가 모두 소수가 된다. 이 함수는 프랑스의 수학자 르장드르(Legendre, A. M., 1752~1833)가 발견했다고 알려져 있다.

▲ 수학자 르장드르 ▲ 정치가 르장드르

왼쪽 그림은 1820년에 그려진 르장드르의 초상화인데, 2009년까지 약 180년 동안 그와 동시대에 살았던 정치가인 르장드르(Legendre, L., 1752~1797)의 초상화를 그의 것으로 잘못 알고 있었다.

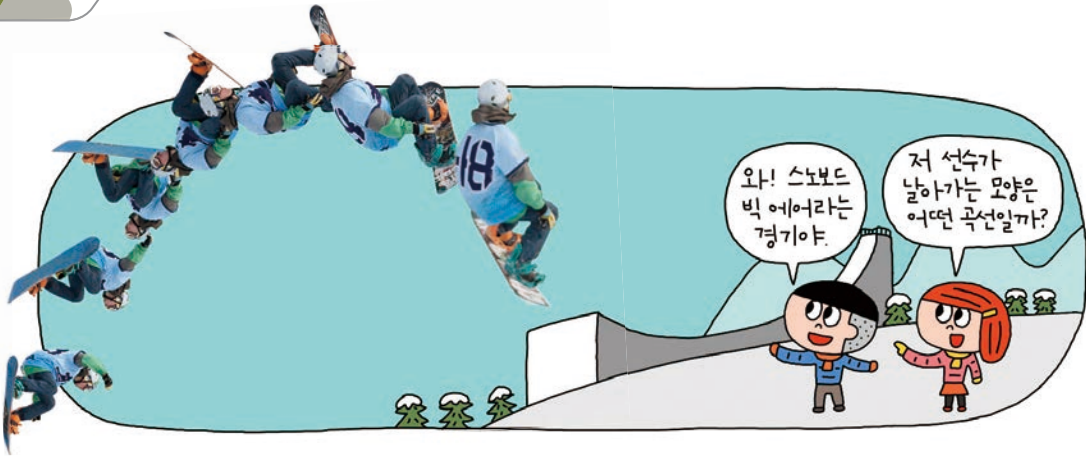
(출처: http://mathworld.wolfram.com, 2018 / Duren, P., 「Changing Faces: The Mistaken Portrait of Legendre」)

탐구 1 오일러가 만든 함수에서 $f(x)=x^2+x+41=x(x+1)+41$임을 이용하여 $f(40)$이 소수가 아님을 설명해 보자.

탐구 2 르장드르가 만든 함수에서 $g(17)$이 합성수임을 설명해 보자.

02 이차함수 $y=ax^2$의 그래프

학습 목표 • 이차함수 $y=ax^2$의 그래프를 그릴 수 있고, 그 성질을 이해한다.

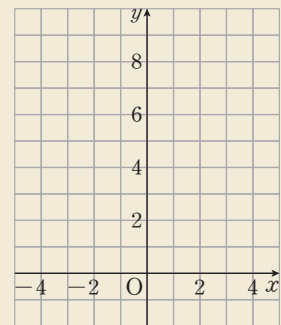
다가서기

이차함수 $y=x^2$의 그래프는 어떻게 그리는가?

생각 열기

x의 값이 정수일 때, 이차함수 $y=x^2$의 그래프를 좌표평면 위에 나타내려고 한다.

1. 다음 표를 완성해 보자.

x	…	-3	-2	-1	0	1	2	3	…
y	…	9			0		4		…

2. 1의 표에서 구한 순서쌍 (x, y)를 좌표로 하는 점을 오른쪽 좌표평면 위에 나타내 보자.

위의 생각 열기에서 x의 값이 정수일 때, 이차함수 $y=x^2$에서 얻은 순서쌍 (x, y)는

$$\cdots, (-3, 9), (-2, 4), (-1, 1), (0, 0), (1, 1), (2, 4), (3, 9), \cdots$$

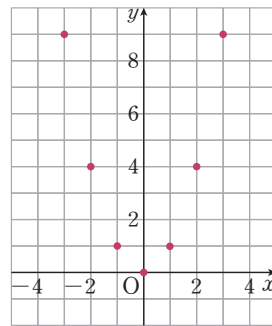
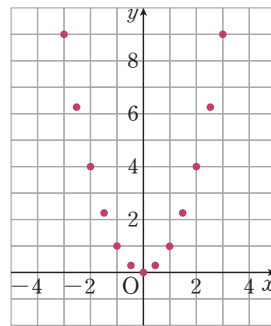
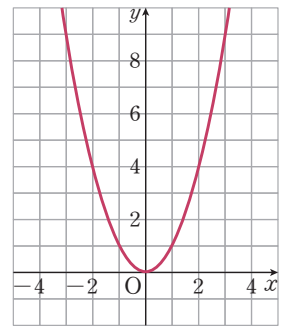
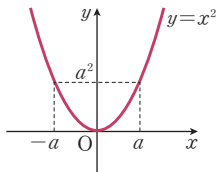
이고, 이를 좌표로 하는 점을 좌표평면 위에 나타내면 [그림 1]과 같다.

이제 x의 값의 간격을 더 좁게 하여 x의 값이

$$\cdots,\ -3,\ -\frac{5}{2},\ -2,\ -\frac{3}{2},\ -1,\ -\frac{1}{2},\ 0,\ \frac{1}{2},\ 1,\ \frac{3}{2},\ 2,\ \frac{5}{2},\ 3,\ \cdots$$

일 때, 이차함수 $y=x^2$에서 얻은 순서쌍 $(x,\ y)$를 좌표로 하는 점을 좌표평면 위에 나타내면 [그림 2]와 같다.

이와 같은 방법으로 x의 값 사이의 간격을 점점 좁혀서 얻은 순서쌍 $(x,\ y)$를 좌표로 하는 점을 좌표평면 위에 나타내면, 이차함수 $y=x^2$의 그래프는 [그림 3]과 같이 원점을 지나는 매끄러운 곡선이 됨을 알 수 있다.

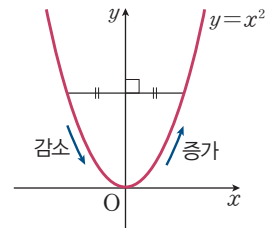
이 곡선이 x의 값이 실수 전체일 때 이차함수 $y=x^2$의 그래프이다.

[그림 1] [그림 2] [그림 3]

[그림 3]에서 알 수 있듯이 이차함수 $y=x^2$의 그래프는 원점을 지나고 아래로 볼록하며 y축에 대칭인 곡선이다.

또 $x<0$일 때는 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하고, $x>0$일 때는 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

이차함수 $y=x^2$의 그래프

이차함수 $y=x^2$의 그래프는

1. 원점을 지나고 아래로 볼록한 곡선이다.
2. y축에 대칭이다.
3. $x<0$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.
   $x>0$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.

참고 이차함수 $y=ax^2+bx+c$ (단, a, b, c는 수, $a\neq0$)에서 x의 값이 구체적으로 주어지지 않으면 x의 값은 실수 전체인 것으로 생각한다.

이차함수 $y=x^2$의 그래프가 x축보다 아래쪽에 나타나지 않는 이유를 설명하시오.

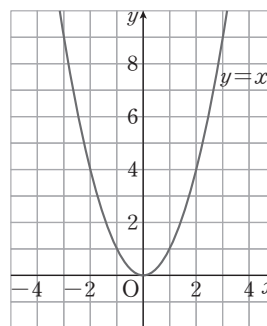
이차함수 $y=ax^2$의 그래프는 어떻게 그리는가?

다음을 통하여 이차함수 $y=2x^2$의 그래프를 어떻게 그리는지 알아보자.

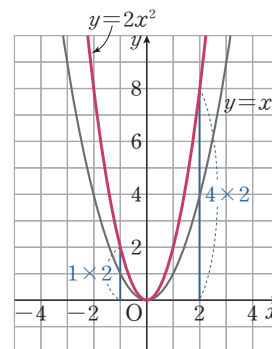
이차함수 $y=2x^2$의 그래프를 $y=x^2$의 그래프를 이용하여 그리려고 한다.

1 다음 표를 완성하고, 같은 x의 값에 대하여 두 이차함수 $y=x^2$과 $y=2x^2$의 함숫값을 비교해 보자.

x	⋯	-3	-2	-1	0	1	2	3	⋯
x^2	⋯	9	4	1	0	1	4	9	⋯
$2x^2$	⋯	18							⋯

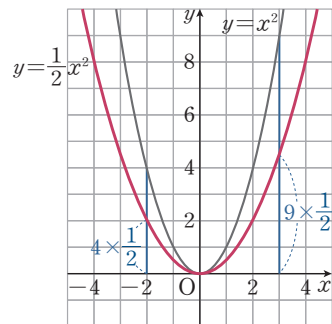
2 이차함수 $y=x^2$의 그래프와 **1**의 결과를 이용하여 오른쪽 좌표평면 위에 이차함수 $y=2x^2$의 그래프를 그려 보자.

위의 함께하기에서 같은 x의 값에 대하여 이차함수 $y=2x^2$의 함숫값은 $y=x^2$의 함숫값의 2배임을 알 수 있다.

따라서 이차함수 $y=2x^2$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 $y=x^2$의 그래프의 각 점에 대하여 y좌표를 2배로 하는 점을 잡아서 그린 것과 같다.

이때 이차함수 $y=2x^2$의 그래프는 원점을 지나고 아래로 볼록하며 y축에 대칭인 곡선이다.

일반적으로 $a>0$일 때, 이차함수 $y=ax^2$의 그래프는 $y=x^2$의 그래프의 각 점에 대하여 y좌표를 a배로 하는 점을 잡아서 그릴 수 있다.

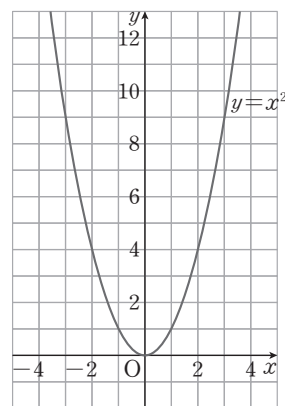
예제 1 이차함수 $y=x^2$의 그래프를 이용하여 이차함수 $y=\frac{1}{2}x^2$의 그래프를 그리시오.

풀이 이차함수 $y=\frac{1}{2}x^2$의 그래프는 $y=x^2$의 그래프의 각 점에 대하여 y좌표를 $\frac{1}{2}$배로 하는 점을 잡아서 그린 것과 같다.

따라서 이차함수 $y=\frac{1}{2}x^2$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

답 풀이 참조

문제 2 오른쪽 그림은 이차함수 $y=x^2$의 그래프이다. 이 그래프를 이용하여 오른쪽 좌표평면 위에 다음 이차함수의 그래프를 각각 그리시오.

(1) $y=3x^2$

(2) $y=\frac{1}{3}x^2$

이제 $a<0$일 때, 이차함수 $y=ax^2$의 그래프를 그려 보자.

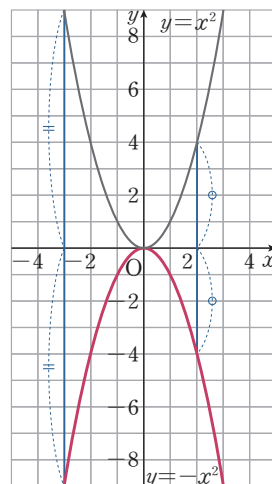
x의 값이 정수일 때, 두 이차함수 $y=x^2$과 $y=-x^2$의 함숫값을 구하여 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-3	-2	-1	0	1	2	3	$\cdots$
x^2	$\cdots$	9	4	1	0	1	4	9	$\cdots$
$-x^2$	$\cdots$	-9	-4	-1	0	-1	-4	-9	$\cdots$

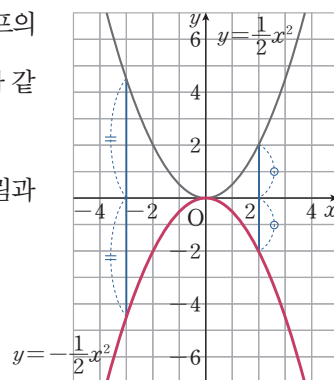
위의 표에서 같은 x의 값에 대하여 이차함수 $y=-x^2$의 함숫값은 $y=x^2$의 함숫값과 절댓값은 같고 부호는 반대임을 알 수 있다.

따라서 이차함수 $y=-x^2$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 $y=x^2$의 그래프의 각 점에 대하여 x축에 대칭인 점을 잡아서 그린 것과 같다.

이때 이차함수 $y=-x^2$의 그래프는 원점을 지나고 위로 볼록하며 y축에 대칭인 곡선이다.

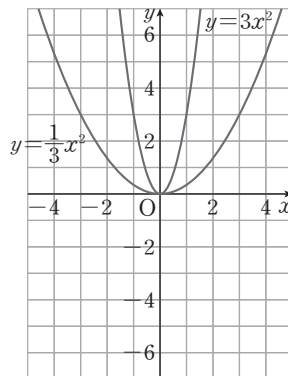
일반적으로 $a<0$일 때, 이차함수 $y=ax^2$의 그래프는 $y=-ax^2$의 그래프의 각 점에 대하여 x축에 대칭인 점을 잡아서 그릴 수 있다.

예제 2 이차함수 $y=\frac{1}{2}x^2$의 그래프를 이용하여 이차함수 $y=-\frac{1}{2}x^2$의 그래프를 그리시오.

풀이 이차함수 $y=-\frac{1}{2}x^2$의 그래프는 $y=\frac{1}{2}x^2$의 그래프의 각 점에 대하여 x축에 대칭인 점을 잡아서 그린 것과 같다.

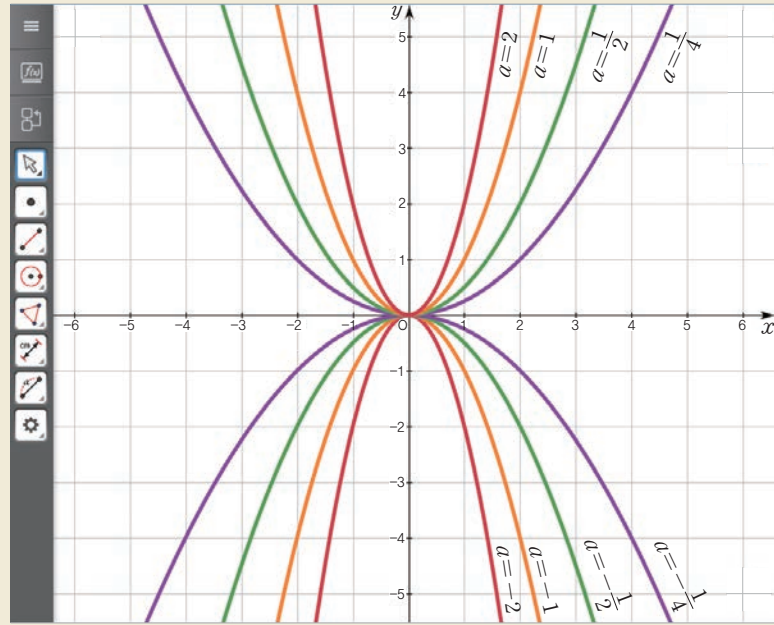
따라서 이차함수 $y=-\frac{1}{2}x^2$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

답 풀이 참조

문제 3 오른쪽 그림은 두 이차함수 $y=3x^2$과 $y=\frac{1}{3}x^2$의 그래프이다. 이 그래프를 이용하여 오른쪽 좌표평면 위에 다음 이차함수의 그래프를 각각 그리시오.

(1) $y=-3x^2$

(2) $y=-\frac{1}{3}x^2$

이차함수 $y=ax^2$의 그래프는 어떤 성질을 가지는가?

다음 그림은 알지오매스를 이용하여 a의 값이 -2, -1, $-\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, 1, 2일 때, 이차함수 $y=ax^2$의 그래프를 그린 것이다.

▸ 알지오매스(AlgeoMath)(https://www.algeomath.kr)에서 함수의 그래프를 그릴 수 있다.

▶ 위의 그래프로부터 알 수 있는 사실을 말해 보자.

위의 생각 열기에서 알 수 있듯이 이차함수 $y=ax^2$의 그래프는 모두 원점을 지나고 y축에 대칭인 곡선이다.

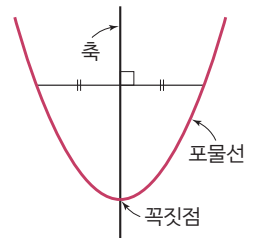
이때 $a>0$이면 아래로 볼록하고 $a<0$이면 위로 볼록하며, a의 절댓값이 클수록 그래프의 폭이 좁아진다.

또 이차함수 $y=ax^2$의 그래프는 $y=-ax^2$의 그래프와 x축에 대칭이다.

▸ '포물선(拋物線)'은 물체를 던졌을 때 나타나는 곡선이라는 뜻이다.

이차함수 $y=ax^2$의 그래프와 같은 모양의 곡선을 **포물선**이라고 한다.

포물선은 한 직선에 대칭이며, 그 직선을 포물선의 **축**이라고 한다. 또 포물선과 축의 교점을 포물선의 **꼭짓점**이라고 한다.

즉, 이차함수 $y=ax^2$의 그래프는 y축을 축으로 하고, 원점을 꼭짓점으로 하는 포물선이다.

▸ 아폴로니오스 (Apollonios, B.C. 262?~B.C. 190?) 고대 그리스의 수학자로, 포물선을 처음으로 연구하였다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

이차함수 $y=ax^2$의 그래프

이차함수 $y=ax^2$의 그래프는

❶ y축을 축으로 하고, 원점을 꼭짓점으로 하는 포물선이다.

❷ $a>0$이면 아래로 볼록하고, $a<0$이면 위로 볼록하다.

❸ a의 절댓값이 클수록 그래프의 폭이 좁아진다.

❹ 이차함수 $y=-ax^2$의 그래프와 x축에 대칭이다.

문제 4 보기의 이차함수에 대하여 다음에 답하시오.

보기

ㄱ. $y=x^2$	ㄴ. $y=-3x^2$	ㄷ. $y=-4x^2$
ㄹ. $y=3x^2$	ㅁ. $y=-\frac{1}{3}x^2$	ㅂ. $y=\frac{1}{4}x^2$

(1) 그래프가 아래로 볼록한 것을 모두 찾으시오.

(2) 그래프가 x축에 대칭인 것끼리 짝 지으시오.

(3) 그래프의 폭이 가장 좁은 것을 찾으시오.

수학 이야기 생활 속 포물선

이차함수의 그래프인 포물선은 자동차의 전조등이나 파라볼라(parabola) 안테나 등에서 찾아볼 수 있다.

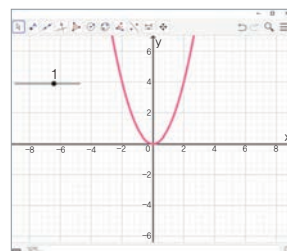
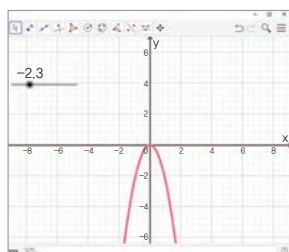
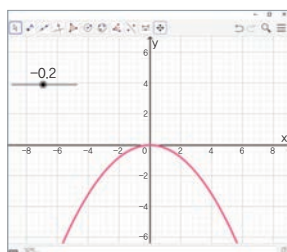
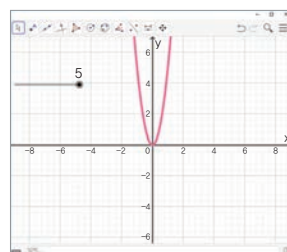
예를 들어 파라볼라 안테나의 단면은 포물선 모양인데, 축에 평행하게 들어온 전파가 반사되어 축 위의 한 점에 모이도록 하는 성질이 있다. 이러한 포물선의 성질 때문에 파라볼라 안테나는 다른 종류의 안테나에 비해 전파 수신 성능이 뛰어나다고 한다.

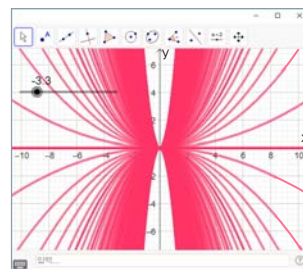
활용하기

의사소통 정보 처리

이차함수 $y=ax^2$의 그래프의 성질 알아보기

컴퓨터 프로그램의 애니메이션 기능을 이용하여 여러 가지 a의 값에 대한 이차함수 $y=ax^2$의 그래프를 그리고, 그 성질을 알아보자.

❶ 입력 칸에 'y=ax^2'를 입력하면 다음 그림과 같은 창이 나타난다. 이때 **'슬라이더 만들기'**를 클릭하면 오른쪽 그림과 같이 기하창에 슬라이더가 나타나고 $a=1$일 때의 이차함수, 즉 $y=x^2$의 그래프가 그려진다.

❷ 슬라이더의 점을 좌우로 드래그하면 다음 그림과 같이 여러 가지 a의 값에 따라 이차함수 $y=ax^2$의 그래프가 그려진다.

[$a=-2.3$일 때]

[$a=-0.2$일 때]

[$a=5$일 때]

❸ 마우스의 커서를 곡선에 대고 오른쪽 버튼을 눌러 **'자취 보이기'**를 클릭한 다음, 다시 마우스의 커서를 슬라이더의 점에 대고 오른쪽 버튼을 눌러 **'애니메이션'**을 클릭하면 오른쪽 그림과 같이 이차함수 $y=ax^2$의 그래프가 동영상처럼 그려지면서 무늬가 만들어진다.

탐구 위의 과정을 통하여 $a>0$일 때와 $a<0$일 때 a의 절댓값이 커짐에 따라 이차함수 $y=ax^2$의 그래프가 어떻게 변하는지 말해 보자.

스스로 확인하는 문제

1 이차함수

함수 $y=f(x)$에서

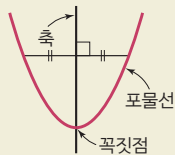
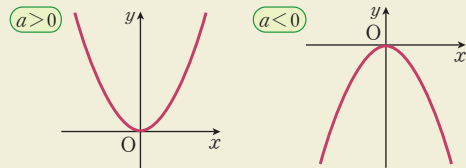
$y=ax^2+bx+c$ (단, a, b, c는 수, $a\neq0$)

와 같이 y가 x에 대한 이차식으로 나타내어질 때, 이 함수 $y=f(x)$를 x에 대한 이차함수라고 한다.

2 이차함수 $y=ax^2$의 그래프

(1) **포물선:** 이차함수 $y=ax^2$의 그래프와 같은 모양의 곡선

① **축:** 포물선의 대칭축

② **꼭짓점:** 포물선과 축의 교점

(2) **이차함수 $y=ax^2$의 그래프**

① y축을 축으로 하고, 원점을 꼭짓점으로 하는 포물선이다.

② $a>0$이면 아래로 볼록하고, $a<0$이면 위로 볼록하다.

③ a의 절댓값이 클수록 그래프의 폭이 좁아진다.

④ 이차함수 $y=-ax^2$의 그래프와 x축에 대칭이다.

기본 문제

01 다음에서 y가 x의 이차함수인 것을 모두 찾으시오.

(1) 윗변의 길이가 x cm, 아랫변의 길이가 $3x$ cm이고, 높이가 $2x$ cm인 사다리꼴의 넓이 y cm^2

(2) 한 모서리의 길이가 x cm인 정육면체의 부피 y cm^3

(3) 반지름의 길이가 x cm인 원의 넓이 y cm^2

(4) 분속 x m로 2분 동안 달린 거리 y m

02 보기의 이차함수에 대하여 다음에 답하시오.

보기

ㄱ. $y=\frac{1}{5}x^2$	ㄴ. $y=5x^2$	ㄷ. $y=-2x^2$
ㄹ. $y=-\frac{3}{2}x^2$	ㅁ. $y=2x^2$	ㅂ. $y=-\frac{1}{5}x^2$

(1) 그래프가 위로 볼록한 것을 모두 찾으시오.

(2) 그래프가 x축에 대칭인 것끼리 짝 지으시오.

(3) 그래프의 폭이 가장 좁은 것을 찾으시오.

표준 문제

03 다음 보기 중에서 이차함수 $y=-5x^2$의 그래프에 대한 설명으로 옳은 것을 모두 고르시오.

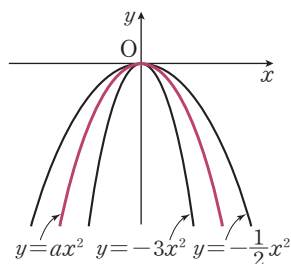
보기

ㄱ. x축을 축으로 한다.

ㄴ. 꼭짓점의 좌표는 $(0, 0)$이다.

ㄷ. 아래로 볼록하다.

ㄹ. 이차함수 $y=\frac{7}{2}x^2$의 그래프보다 폭이 좁다.

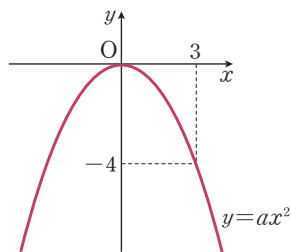
04 세 이차함수 $y=ax^2$, $y=-3x^2$, $y=-\frac{1}{2}x^2$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 수 a의 값의 범위를 구하시오.

05 이차함수 $y=2x^2$의 그래프와 x축에 대칭인 그래프가 점 $(-2, k)$를 지날 때, k의 값을 구하시오.

발전 문제

06 이차함수 $y=ax^2$의 그래프가 오른쪽 그림과 같다.

문제 해결

(1) 수 a의 값을 구하시오.

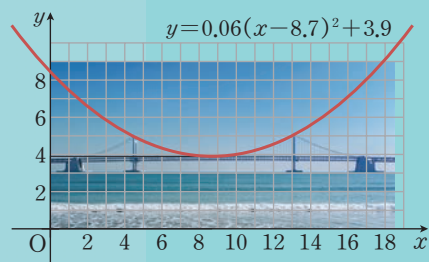
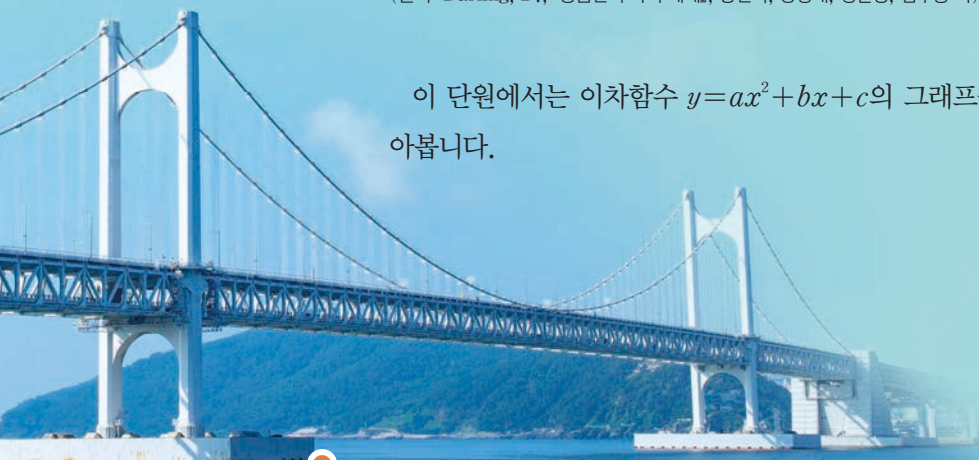
(2) 이 그래프가 점 $(m, -8)$을 지날 때, m의 값을 모두 구하시오.

07 이차함수 $y=ax^2$의 그래프가 점 $(-2, 1)$을 지나고, 이차함수 $y=bx^2$의 그래프와 x축에 대칭일 때, $a-b$의 값을 구하시오. (단, a와 b는 수이다.)

2 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프

높이가 같은 두 기둥에 굵기와 밀도가 균일한 밧줄의 양 끝을 고정시켰을 때 밧줄이 처진 모양의 곡선을 '현수선(懸垂線, catenary)'이라고 합니다. 또 섬과 섬을 연결하거나 강이나 협곡을 사이에 둔 두 지역을 연결하기 위해 현수선을 이용하여 만든 다리를 '현수교(suspension bridge)'라고 합니다.

현수교를 세울 때 양쪽 주탑의 꼭대기에 고정시킨 케이블이 그리는 아치는 현수선의 모양을 이루지만, 케이블을 다리의 상판에 수직으로 연결하는 과정에서 현수선보다는 포물선에 가까운 모양이 되기 때문에 아치를 포물선으로 설계한다고 합니다.

우리나라에 있는 어느 현수교의 케이블이 그리는 아치는 컴퓨터 프로그램을 이용하면 오른쪽 그림과 같이 이차함수 $y=0.06(x-8.7)^2+3.9$의 그래프인 포물선과 비슷한 모양임을 알 수 있습니다.

(출처: Darling, D., 『궁금한 수학의 세계』, 황선욱, 강병개, 정달영, 김주홍 역)

이 단원에서는 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프를 그리는 방법과 그 성질에 대하여 알아봅니다.

• 평행이동

1 다음 일차함수의 그래프는 $y=2x$의 그래프를 y축의 방향으로 얼마만큼 평행이동한 것인지 말하시오.

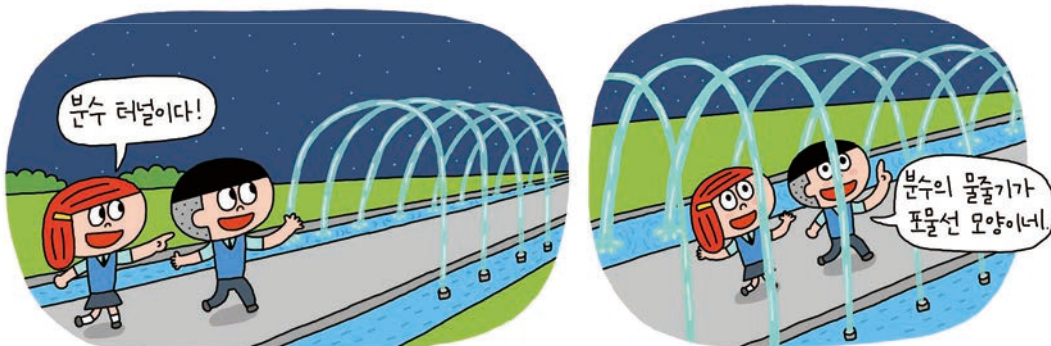
(1) $y=2x+3$ (2) $y=2x-5$

• 완전제곱식

2 다음 식이 완전제곱식이 되도록 □ 안에 알맞은 수를 써넣으시오.

(1) $x^2+4x+\square$ (2) $x^2+\square x+25$

이차함수 $y=a(x-p)^2+q$의 그래프

학습 목표 • 이차함수 $y=a(x-p)^2+q$의 그래프를 그릴 수 있고, 그 성질을 이해한다.

이차함수 $y=ax^2+q$의 그래프는 어떻게 그리는가?

x의 값이 정수일 때, 두 이차함수 $y=x^2$과 $y=x^2+3$의 함숫값을 비교하려고 한다.

1. 다음 표를 완성해 보자.

x	$\cdots$	-3	-2	-1	0	1	2	3	$\cdots$
x^2	$\cdots$	9	4	1	0	1	4	9	$\cdots$
x^2+3	$\cdots$	12							$\cdots$

2. 같은 x의 값에 대하여 두 이차함수 $y=x^2$과 $y=x^2+3$의 함숫값을 비교해 보자.

위의 생각 열기에서 같은 x의 값에 대하여 이차함수 $y=x^2+3$의 함숫값은 $y=x^2$의 함숫값보다 항상 3만큼 크다는 것을 알 수 있다.

따라서 이차함수 $y=x^2+3$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 $y=x^2$의 그래프를 y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것과 같다.

배웠어요!

한 도형을 일정한 방향으로 일정한 거리만큼 이동하는 것을 평행이동이라고 한다.

이때 이차함수 $y=x^2+3$의 그래프는 y축을 축으로 하고, 점 $(0,\ 3)$을 꼭짓점으로 하는 아래로 볼록한 포물선이다.

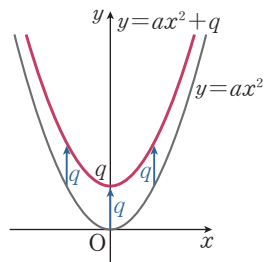
이와 같이 이차함수 $y=ax^2+q$의 그래프는 $y=ax^2$의 그래프를 y축의 방향으로 q만큼 평행이동하여 그릴 수 있다.

일반적으로 이차함수 $y=ax^2+q$의 그래프는 다음 성질을 갖는다.

이차함수 $y=ax^2+q$의 그래프

이차함수 $y=ax^2+q$의 그래프는

❶ 이차함수 $y=ax^2$의 그래프를 y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 것이다.

❷ y축을 축으로 하고, 점 $(0,\ q)$를 꼭짓점으로 하는 포물선이다.

보기 이차함수 $y=-4x^2-2$의 그래프는 $y=-4x^2$의 그래프를 y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다. 또 이 그래프는 y축을 축으로 하고, 꼭짓점의 좌표는 $(0,\ -2)$이다.

문제 1 다음 이차함수의 그래프는 $y=2x^2$의 그래프를 y축의 방향으로 얼마만큼 평행이동한 것인지 말하시오.

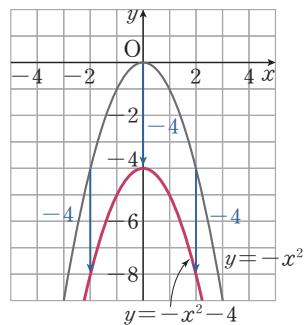
(1) $y=2x^2+5$ (2) $y=2x^2-1$

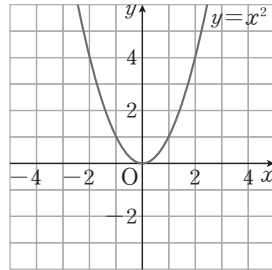
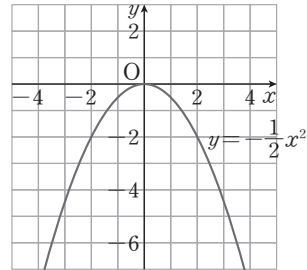
예제 1 이차함수 $y=-x^2$의 그래프를 이용하여 이차함수 $y=-x^2-4$의 그래프를 그리고, 축의 방정식과 꼭짓점의 좌표를 각각 구하시오.

풀이 이차함수 $y=-x^2-4$의 그래프는 $y=-x^2$의 그래프를 y축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.

이때 축의 방정식은 $x=0$이고, 꼭짓점의 좌표는 $(0,\ -4)$이다.

▸ y축의 방정식은 $x=0$이다.

답 풀이 참조

문제 2 주어진 이차함수의 그래프를 이용하여 좌표평면 위에 다음 이차함수의 그래프를 그리고, 축의 방정식과 꼭짓점의 좌표를 각각 구하시오.

(1) $y=x^2-3$

(2) $y=-\frac{1}{2}x^2+1$

이차함수 $y=a(x-p)^2$의 그래프는 어떻게 그리는가?

x의 값이 정수일 때, 두 이차함수 $y=x^2$과 $y=(x-2)^2$의 함숫값을 비교하려고 한다.

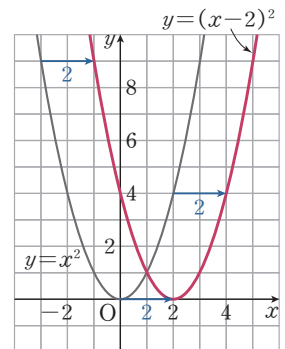
1. 다음 표를 완성해 보자.

x	$\cdots$	-3	-2	-1	0	1	2	3	$\cdots$
x^2	$\cdots$	9	4	1	0	1	4	9	$\cdots$
$(x-2)^2$	$\cdots$	25	16						$\cdots$

2. 두 이차함수 $y=x^2$과 $y=(x-2)^2$에서 함숫값이 같을 때의 x의 값을 비교해 보자.

위의 생각 열기에서 두 이차함수 $y=x^2$과 $y=(x-2)^2$에서 함숫값이 같을 때, $y=(x-2)^2$에서의 x의 값은 $y=x^2$에서의 x의 값보다 2만큼 크다는 것을 알 수 있다.

따라서 이차함수 $y=(x-2)^2$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 $y=x^2$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것과 같다.

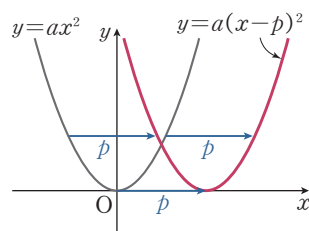
이때 이차함수 $y=(x-2)^2$의 그래프는 직선 $x=2$를 축으로 하고, 점 $(2,\ 0)$을 꼭짓점으로 하는 아래로 볼록한 포물선이다.

이와 같이 이차함수 $y=a(x-p)^2$의 그래프는 $y=ax^2$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼 평행이동하여 그릴 수 있다.

일반적으로 이차함수 $y=a(x-p)^2$의 그래프는 다음 성질을 갖는다.

이차함수 $y=a(x-p)^2$의 그래프

이차함수 $y=a(x-p)^2$의 그래프는

❶ 이차함수 $y=ax^2$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼 평행이동한 것이다.

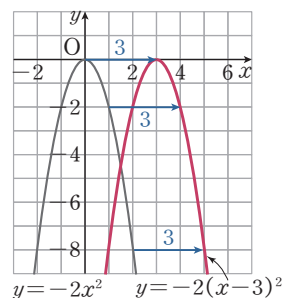
❷ 직선 $x=p$를 축으로 하고, 점 $(p, 0)$을 꼭짓점으로 하는 포물선이다.

보기 이차함수 $y=-2(x+3)^2$의 그래프는 $y=-2x^2$의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이다. 또 이 그래프는 직선 $x=-3$을 축으로 하고, 꼭짓점의 좌표는 $(-3, 0)$이다.

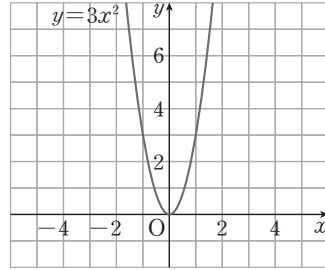
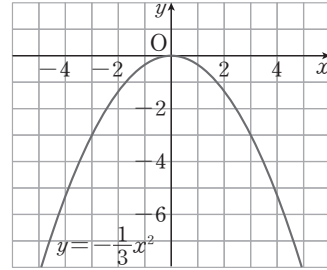
문제 3 다음 이차함수의 그래프는 $y=\frac{1}{2}x^2$의 그래프를 x축의 방향으로 얼마만큼 평행이동한 것인지 말하시오.

(1) $y=\frac{1}{2}(x-4)^2$ (2) $y=\frac{1}{2}(x+5)^2$

예제 2 이차함수 $y=-2x^2$의 그래프를 이용하여 이차함수 $y=-2(x-3)^2$의 그래프를 그리고, 축의 방정식과 꼭짓점의 좌표를 각각 구하시오.

풀이 이차함수 $y=-2(x-3)^2$의 그래프는 $y=-2x^2$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.

이때 축의 방정식은 $x=3$이고, 꼭짓점의 좌표는 $(3, 0)$이다.

답 풀이 참조

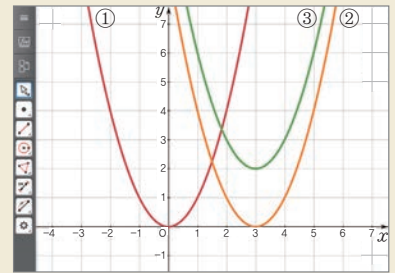
문제 4 주어진 이차함수의 그래프를 이용하여 좌표평면 위에 다음 이차함수의 그래프를 그리고, 축의 방정식과 꼭짓점의 좌표를 각각 구하시오.

(1) $y=3(x-1)^2$ (2) $y=-\frac{1}{3}(x+2)^2$

이차함수 $y=a(x-p)^2+q$의 그래프는 어떻게 그리는가?

오른쪽 그림은 알지오매스를 이용하여 세 이차함수

$y=x^2$ ...... ①

$y=(x-3)^2$ ...... ②

$y=(x-3)^2+2$ ...... ③

의 그래프를 그린 것이다.

1. ①의 그래프를 어떻게 평행이동하면 ②의 그래프와 같아지는지 말해 보자.

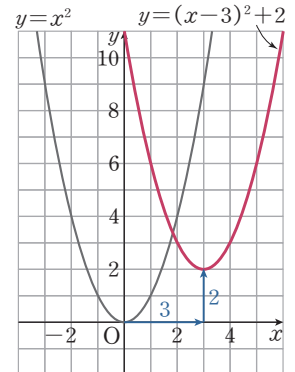
2. ②의 그래프를 어떻게 평행이동하면 ③의 그래프와 같아지는지 말해 보자.

위의 생각 열기에서 이차함수 $y=(x-3)^2$의 그래프는 $y=x^2$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것과 같고, 이차함수 $y=(x-3)^2+2$의 그래프는 $y=(x-3)^2$의 그래프를 y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것과 같음을 알 수 있다.

따라서 이차함수 $y=(x-3)^2+2$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 $y=x^2$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼 평행이동한 후, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것과 같다.

이때 이차함수 $y=(x-3)^2+2$의 그래프는 직선 $x=3$을 축으로 하고, 점 $(3, 2)$를 꼭짓점으로 하는 아래로 볼록한 포물선이다.

생각 톡톡

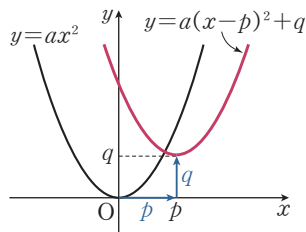
이차함수 $y=x^2$의 그래프를 y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 후, x축의 방향으로 3만큼 평행이동해도 이차함수 $y=(x-3)^2+2$의 그래프와 일치할까?

이와 같이 이차함수 $y=a(x-p)^2+q$의 그래프는 $y=ax^2$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동하여 그릴 수 있다.

일반적으로 이차함수 $y=a(x-p)^2+q$의 그래프는 다음 성질을 갖는다.

이차함수 $y=a(x-p)^2+q$의 그래프

이차함수 $y=a(x-p)^2+q$의 그래프는

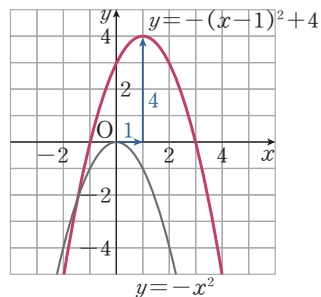
❶ 이차함수 $y=ax^2$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 것이다.

❷ 직선 $x=p$를 축으로 하고, 점 (p, q)를 꼭짓점으로 하는 포물선이다.

보기 이차함수 $y=-2(x+3)^2-2$의 그래프는 $y=-2x^2$의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다. 또 이 그래프는 직선 $x=-3$을 축으로 하고, 꼭짓점의 좌표는 $(-3, -2)$이다.

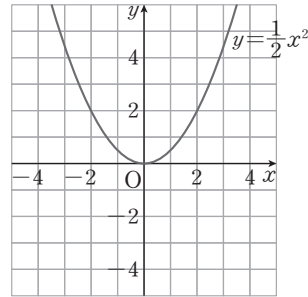
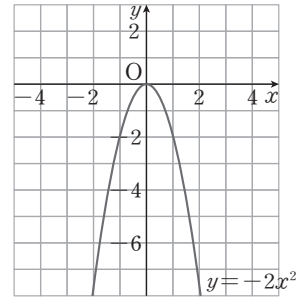
문제 5 다음 이차함수의 그래프는 $y=\frac{1}{4}x^2$의 그래프를 x축과 y축의 방향으로 각각 얼마만큼 평행이동한 것인지 말하시오.

(1) $y=\frac{1}{4}(x-2)^2+1$ (2) $y=\frac{1}{4}(x+1)^2+5$

예제 3 이차함수 $y=-x^2$의 그래프를 이용하여 이차함수 $y=-(x-1)^2+4$의 그래프를 그리고, 축의 방정식과 꼭짓점의 좌표를 각각 구하시오.

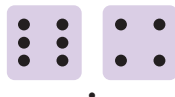
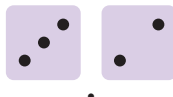
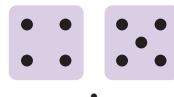
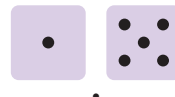
풀이 이차함수 $y=-(x-1)^2+4$의 그래프는 $y=-x^2$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.
이때 축의 방정식은 $x=1$이고, 꼭짓점의 좌표는 $(1, 4)$이다.

답 풀이 참조

문제 6 주어진 이차함수의 그래프를 이용하여 좌표평면 위에 다음 이차함수의 그래프를 그리고, 축의 방정식과 꼭짓점의 좌표를 각각 구하시오.

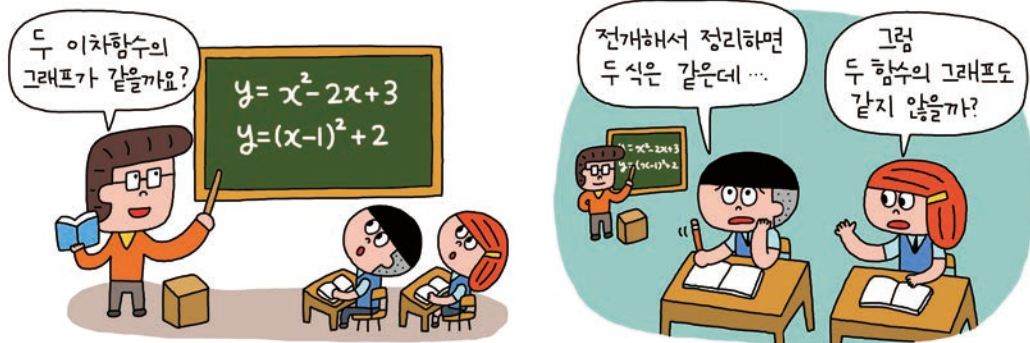
(1) $y=\frac{1}{2}(x-2)^2-3$

(2) $y=-2(x+2)^2+1$

문제 7 이차함수 $y=-\frac{2}{3}x^2$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -5만큼 평행이동한 그래프의 축의 방정식과 꼭짓점의 좌표를 각각 구하시오. 또 이 그래프를 나타내는 이차함수의 식을 구하시오.

생각이 크는 수학

주사위를 한 번 던져서 나오는 눈의 수가 홀수이면 주어진 이차함수의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, 짝수이면 y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한다.
예를 들어 한 개의 주사위를 두 번 던져서 나오는 눈의 수가 모두 홀수이면 x축의 방향으로 4만큼 평행이동한다.

▶ 이차함수 $y=2x^2$의 그래프를 위의 규칙에 따라 평행이동하려고 한다. 한 개의 주사위를 두 번 던져서 나온 눈의 모양이 다음 그림과 같을 때, 평행이동한 그래프를 나타내는 이차함수의 식을 선으로 연결해 보자.

$y=2x^2-2$　　$y=2x^2-3$　　$y=2(x-4)^2$　　$y=2(x-2)^2-1$

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프

학습 목표 • 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프를 그릴 수 있고, 그 성질을 이해한다.

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프는 어떻게 그리는가?

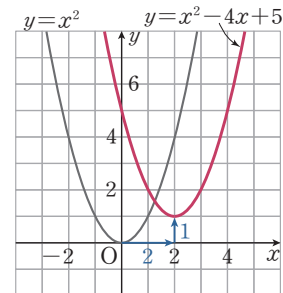
오른쪽 그림은 이차함수 $y=x^2-4x+5$를 $y=a(x-p)^2+q$의 꼴로 고치는 과정을 칠판에 적은 것이다.

▶ □ 안에 알맞은 수를 써넣어 보자.

위의 생각 열기에서 이차함수 $y=x^2-4x+5$를 $y=a(x-p)^2+q$의 꼴로 고치면 $y=(x-2)^2+1$이다.

따라서 이차함수 $y=x^2-4x+5$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 $y=x^2$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것과 같다.

이때 이차함수 $y=x^2-4x+5$의 그래프는 직선 $x=2$를 축으로 하고, 점 $(2, 1)$을 꼭짓점으로 하는 아래로 볼록한 포물선이다.

또 $x=0$일 때 $y=5$이므로 그래프가 y축과 만나는 점의 좌표는 $(0, 5)$이다. 즉, y절편은 5이다.

> **배웠어요!**
> 함수의 그래프가 y축과 만나는 점의 y좌표를 그 그래프의 y절편이라고 한다.

이와 같이 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프는 이차함수의 식을 $y=a(x-p)^2+q$의 꼴로 고쳐서 그릴 수 있다.

일반적으로 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프는 다음 성질을 갖는다.

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프는

❶ $y=a(x-p)^2+q$의 꼴로 고쳐서 그린다.

❷ $a>0$이면 아래로 볼록하고, $a<0$이면 위로 볼록하다.

❸ y축과 점 $(0,\ c)$에서 만난다. 즉, y절편은 c이다.

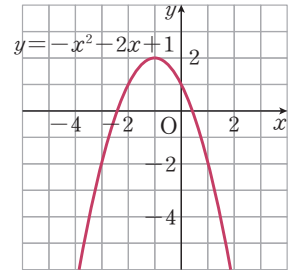
예제 1

이차함수 $y=-x^2-2x+1$의 그래프를 그리고, 축의 방정식과 꼭짓점의 좌표, y절편을 각각 구하시오.

풀이 이차함수 $y=-x^2-2x+1$을 $y=a(x-p)^2+q$의 꼴로 고치면

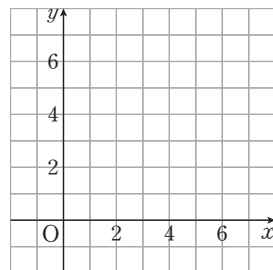
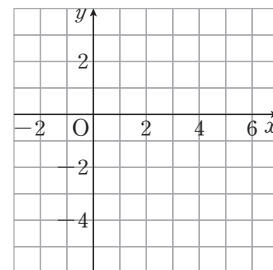
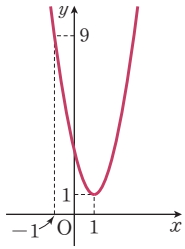
$$\begin{aligned} y&=-x^2-2x+1 \\ &=-(x^2+2x+1-1)+1 \\ &=-(x+1)^2+2 \end{aligned}$$

따라서 이차함수 $y=-x^2-2x+1$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

이때 축의 방정식은 $x=-1$, 꼭짓점의 좌표는 $(-1,\ 2)$, y절편은 1이다.

답 풀이 참조

문제 1

좌표평면 위에 다음 이차함수의 그래프를 그리고, 축의 방정식과 꼭짓점의 좌표, y절편을 각각 구하시오.

(1) $y=\dfrac{1}{3}x^2-2x+2$

(2) $y=-2x^2+8x-5$

예제 2

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프의 꼭짓점의 좌표가 $(1,\ 1)$이고 점 $(-1,\ 9)$를 지날 때, 이 이차함수의 식을 구하시오. (단, a, b, c는 수이다.)

풀이 꼭짓점의 좌표가 $(1, 1)$이므로 구하는 이차함수의 식은

$$y=a(x-1)^2+1 \qquad \cdots\cdots ①$$

로 놓을 수 있다.

이 이차함수의 그래프가 점 $(-1, 9)$를 지나므로 $x=-1$과 $y=9$를 ①에 대입하면

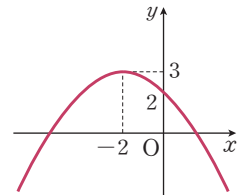
$$9=4a+1, \quad a=2$$

따라서 구하는 이차함수의 식은

$$y=2(x-1)^2+1,\ 즉 \qquad y=2x^2-4x+3$$

답 $y=2x^2-4x+3$

문제 2 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프의 꼭짓점의 좌표가 $(3,\ -5)$이고 점 $(2,\ -8)$을 지날 때, 이 이차함수의 식을 구하시오. (단, a, b, c는 수이다.)

문제 3 오른쪽 그림과 같은 그래프를 나타내는 이차함수의 식을 $y=ax^2+bx+c$의 꼴로 나타내시오.

생각이 크는 수학

추론 의사소통

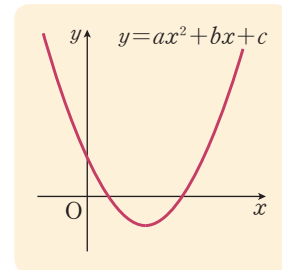
이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 오른쪽 그림과 같다.

(단, a, b, c는 수이다.)

1 a와 c의 부호를 각각 말해 보자.

2 이 이차함수의 식을 $y=a(x-p)^2+q$의 꼴로 나타내었을 때, p와 q의 부호를 각각 말해 보자.

3 2의 결과를 이용하여 b의 부호를 말해 보자.

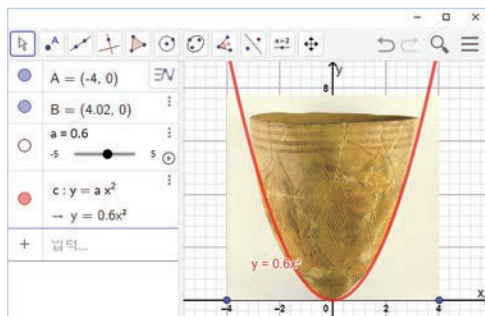
공학적 도구 활용하기

이차함수로 표현하기

신석기 시대에 우리나라에서 대표적으로 사용되었던 빗살무늬 토기는 당시 사람들의 생활 양식과 미적 감각을 잘 보여 주는 유물 중의 하나인데, 빗살무늬 토기의 옆 선은 포물선 모양을 하고 있다.

빗살무늬 토기의 사진을 컴퓨터 프로그램에 불러와서 그 옆 선이 대략 어떤 이차함수의 그래프와 비슷한지 다음과 같이 알아보자.

❶ **'편집>이미지 불러오기'**를 클릭하여 미리 저장한 빗살무늬 토기 사진을 불러온 후, 토기의 꼭짓점을 좌표평면의 원점에 일치하도록 놓는다.

❷ 입력 칸에 'y=ax^2'를 입력하고 **'슬라이더 만들기'**를 클릭하면 기하창에 $a=1$일 때의 이차함수, 즉 $y=x^2$의 그래프가 그려진다.

❸ 슬라이더의 점을 좌우로 드래그하면서 토기의 옆 선과 가장 가까운 이차함수의 그래프를 찾으면 다음 그림과 같이 $a=0.6$일 때, 즉 이차함수 $y=0.6x^2$의 그래프가 이 빗살무늬 토기의 옆 선과 대체로 비슷함을 알 수 있다.

탐구 미국의 커셴바움(Kirschenbaum, B., 1924~2016)은 포물선을 이용하여 오른쪽 그림과 같은 작품 「Blue Steel Parabola 1」을 만들었다. 위와 같은 방법으로 이 사진을 컴퓨터 프로그램에 불러와서 작품의 옆 선이 대략 어떤 이차함수의 그래프와 비슷한지 알아보자.

스스로 확인하는 문제

1 이차함수 $y=a(x-p)^2+q$의 그래프

(1) 이차함수 $y=ax^2+q$의 그래프

① 이차함수 $y=ax^2$의 그래프를 y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 것이다.

② 축의 방정식: $x=0$

③ 꼭짓점의 좌표: $(0,\ q)$

(2) 이차함수 $y=a(x-p)^2$의 그래프

① 이차함수 $y=ax^2$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼 평행이동한 것이다.

② 축의 방정식: $x=p$

③ 꼭짓점의 좌표: $(p,\ 0)$

(3) 이차함수 $y=a(x-p)^2+q$의 그래프

① 이차함수 $y=ax^2$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 것이다.

② 축의 방정식: $x=p$

③ 꼭짓점의 좌표: $(p,\ q)$

2 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프는

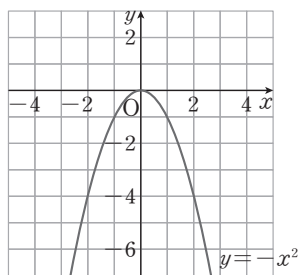
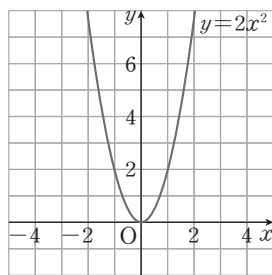
① $y=a(x-p)^2+q$의 꼴로 고쳐서 그린다.

② $a>0$이면 아래로 볼록하고, $a<0$이면 위로 볼록하다.

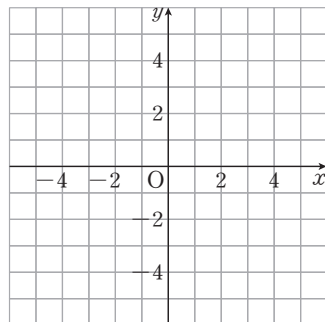
③ y축과 점 $(0,\ c)$에서 만난다. 즉, y절편은 c이다.

기본 문제

01 주어진 이차함수의 그래프를 이용하여 좌표평면 위에 다음 이차함수의 그래프를 그리고, 축의 방정식과 꼭짓점의 좌표를 각각 구하시오.

(1) $y=-x^2+1$

(2) $y=2(x-2)^2$

02 오른쪽 좌표평면 위에 다음 이차함수의 그래프를 그리고, 축의 방정식과 꼭짓점의 좌표를 각각 구하시오.

(1) $y=(x+2)^2-3$

(2) $y=-\frac{1}{2}(x-1)^2+4$

03 다음 이차함수의 그래프의 축의 방정식과 꼭짓점의 좌표를 각각 구하시오.

(1) $y=x^2+8x+17$ (2) $y=-x^2-4x-1$

(3) $y=2x^2-8x+8$ (4) $y=-3x^2+6x-12$

표준 문제

04 이차함수 $y=ax^2$의 그래프를 y축의 방향으로 5만큼 평행이동하면 점 $(3,\ 2)$를 지날 때, 수 a의 값을 구하시오.

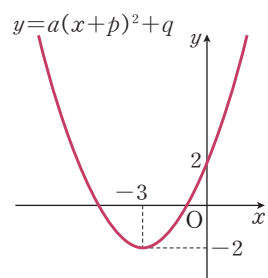
05 이차함수 $y=(x-3)^2$의 그래프와 꼭짓점이 일치하고 점 $(1,\ -8)$을 지나는 이차함수의 그래프의 y절편을 구하시오.

06 다음 보기 중에서 이차함수 $y=-(x+3)^2+1$의 그래프에 대한 설명으로 옳은 것을 모두 고르시오.

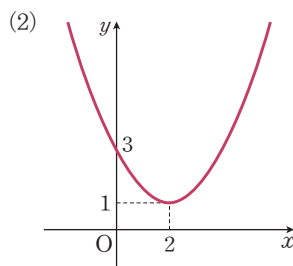
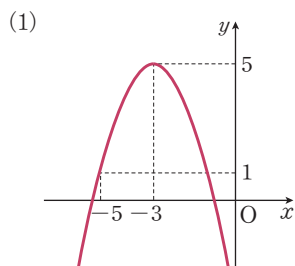
보기

ㄱ. 위로 볼록한 포물선이다.
ㄴ. 꼭짓점의 좌표는 $(-3,\ 1)$이다.
ㄷ. y축과 점 $(0,\ 1)$에서 만난다.
ㄹ. 이차함수 $y=-x^2$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

07 이차함수 $y=-x^2$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동하였더니 이차함수 $y=-(x-3)^2-5$의 그래프와 일치하였다. 두 수 m과 n의 값을 각각 구하시오.

08 이차함수 $y=a(x+p)^2+q$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 세 수 a, p, q의 값을 각각 구하시오.

09 다음 그림과 같은 그래프를 나타내는 이차함수의 식을 $y=ax^2+bx+c$의 꼴로 나타내시오.

(1)

(2)

발전 문제

10 이차함수 $y=ax^2+bx+5$의 그래프가 두 점 $(-1,\ 8)$과 $(1,\ 4)$를 지날 때, 두 수 a, b의 값을 각각 구하시오.

11 추론

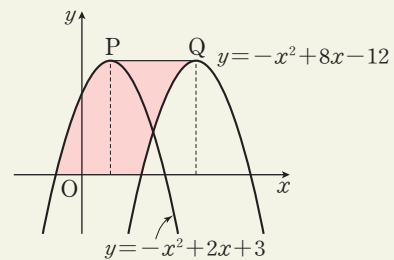
이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프의 꼭짓점의 좌표가 $(3,\ -4)$일 때, 다음에 답하시오.

(1) 두 수 b와 c를 각각 a에 대한 식으로 나타내시오.

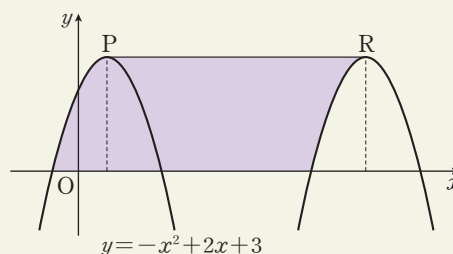
(2) 이 이차함수의 그래프가 모든 사분면을 지날 때, 수 a의 값의 범위를 구하시오.

이차함수의 그래프의 성질을 이용하여 넓이 구하기

이차함수의 그래프는 축에 대하여 대칭이다. 또 이차함수의 그래프를 x축이나 y축의 방향으로 평행이동하면 그래프를 나타내는 식은 변하지만 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이는 변하지 않는다. 이러한 사실을 이용하면 이차함수의 그래프와 직선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구할 수 있다.

1 오른쪽 그림과 같은 두 이차함수 $y=-x^2+2x+3$과 $y=-x^2+8x-12$의 그래프의 꼭짓점을 각각 P와 Q라고 하자.

❶ 두 꼭짓점 P와 Q의 좌표를 각각 구해 보자.

❷ 색칠한 부분의 넓이를 구해 보자.

2 위의 **1** 에서 이차함수 $y=-x^2+8x-12$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼 평행이동한 그래프의 꼭짓점을 R라고 하자. 다음 그림에서 색칠한 부분의 넓이가 **1** 에서 구한 넓이의 3배가 될 때, p의 값을 구해 보자. (단, $p>0$)

단원을 마무리하는 문제

01 다음 중에서 이차함수인 것을 모두 고르면? (정답 2개)

① $y=-x(x+2)$ ② $y=\frac{1}{x}+x^2$

③ $y=-5+3x^2$ ④ $y=(x+1)^2-x^2$

⑤ $y=x^3-(x-1)^2$

02 다음 중에서 주어진 조건을 모두 만족시키는 이차함수는?

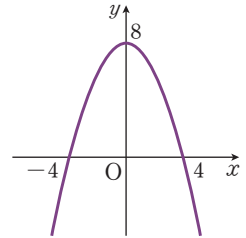
> (가) 그래프는 y축을 축으로 하는 포물선이다.
> (나) 그래프의 꼭짓점은 원점이다.
> (다) 그래프는 아래로 볼록하다.
> (라) 그래프의 폭이 $y=\frac{1}{2}x^2$의 그래프의 폭보다 넓다.

① $y=2x^2$ ② $y=\frac{1}{5}x^2$ ③ $y=-x^2$

④ $y=\frac{3}{4}x^2$ ⑤ $y=-\frac{1}{4}x^2$

03 이차함수 $y=\frac{1}{3}x^2$의 그래프와 x축에 대칭인 그래프가 점 $(6, k)$를 지날 때, k의 값을 구하시오.

04 이차함수 $y=ax^2$의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼 평행이동하면 점 $(-2, 3)$을 지난다고 할 때, 수 a의 값을 구하시오.

05 오른쪽 그림과 같은 그래프를 나타내는 이차함수의 식을 구하시오.

06 이차함수 $y=-x^2$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동하였더니 이차함수 $y=-(x-1)^2-3$의 그래프와 일치하였다. 두 수 m과 n에 대하여 $m+n$의 값은?

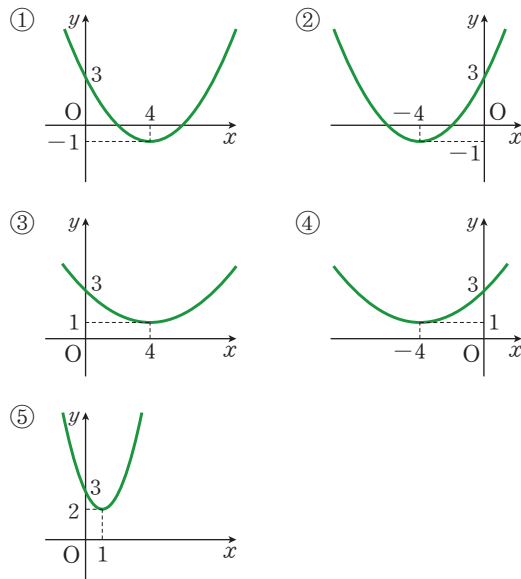
① -2 ② -1 ③ 0

④ 1 ⑤ 2

07 꼭짓점의 좌표가 $(1,\ -4)$이고, 점 $(0,\ 3)$을 지나는 이차함수의 그래프를 나타내는 식이 $y=a(x-p)^2+q$일 때, 세 수 a, p, q에 대하여 apq의 값을 구하시오.

08 이차함수 $y=2x^2-8x+7$의 식을 $y=a(x-p)^2+q$의 꼴로 나타내었을 때, 세 수 a, p, q에 대하여 $a+p+q$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

09 다음 중에서 이차함수 $y=\frac{1}{4}x^2-2x+3$의 그래프는?

①
②
③
④
⑤
10 이차함수 $y=-3x^2+24x+k$의 그래프의 꼭짓점이 x축 위에 있을 때, 수 k의 값은?

① -48 ② -24 ③ 12
④ 24 ⑤ 48

11 다음 중에서 이차함수 $y=-x^2+6x-5$의 그래프에 대한 설명으로 옳지 않은 것은?

① 꼭짓점의 좌표는 $(3,\ 4)$이다.
② 축의 방정식은 $x=3$이다.
③ x축과의 교점의 좌표는 $(1,\ 0)$, $(5,\ 0)$이다.
④ 이차함수 $y=-(x-3)^2+4$의 그래프와 일치한다.
⑤ 모든 사분면을 지난다.

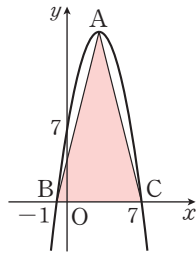
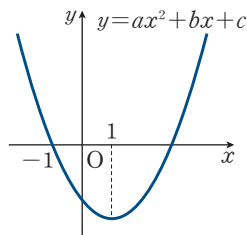
12 이차함수 $y=\frac{1}{3}x^2-2x+p$의 그래프의 꼭짓점이 직선 $y=-2x+n$ 위에 있을 때, 두 수 p와 n에 대하여 $n-p$의 값을 구하시오.

13 두 이차함수

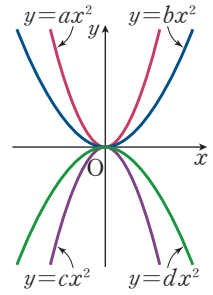
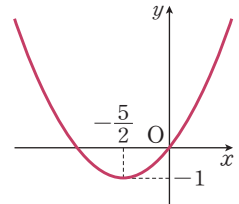
$y=x^2-2ax+6,\ y=-2x^2-8x+b+3$

의 그래프의 꼭짓점이 일치할 때, 두 수 a와 b에 대하여 $a+b$의 값은?

① -11 ② -9 ③ -7
④ -5 ⑤ -3

14 오른쪽 그림은 이차함수 $y=-x^2+ax+b$의 그래프이다. △ABC의 넓이를 구하시오. (단, a와 b는 수이고, 점 A는 포물선의 꼭짓점이다.)

15 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 다음 중에서 옳은 것은? (단, a, b, c는 수이다.)

① $a<0$
② $b>0$
③ $ac>0$
④ $a+b+c<0$
⑤ $a-b+c<0$

[16~19] 서술형 풀이 과정과 답을 써 보자.

16 이차함수 $y=ax^2$, $y=bx^2$, $y=cx^2$, $y=dx^2$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 네 수 a, b, c, d의 대소를 비교하시오.

17 오른쪽 그림과 같은 그래프를 나타내는 이차함수의 식을 $y=a(x-p)^2+q$의 꼴로 나타내시오.

18 이차함수 $y=2x^2$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 그래프가 점 $(a,\ 4)$를 지날 때, a의 값을 모두 구하시오.

19 이차함수 $y=x^2-4x+3$의 그래프의 꼭짓점을 A, 그래프와 y축의 교점을 B, 원점을 O라고 할 때, △ABO의 넓이를 구하시오.

자기 평가 정답을 맞힌 문항에 ○표를 하고 결과를 점검한 다음, 이 단원의 학습 목표를 얼마나 성취했는지 스스로 평가하고, 학습 보충 계획을 세워 보자.

문항 번호	학습 목표	성취도
01 02 03 16	이차함수의 뜻을 이해하고, $y=ax^2$의 그래프의 성질을 이해하였는가?	☺ 😐 ☹
04 05 06 07 17 18	이차함수 $y=a(x-p)^2+q$의 그래프를 그릴 수 있고, 그 성질을 이해하였는가?	☺ 😐 ☹
08 09 10 11 12 13 14 15 19	이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프를 그릴 수 있고, 그 성질을 이해하였는가?	☺ 😐 ☹

0개~10개 개념 학습이 필요해요! → 11개~13개 부족한 부분을 검토해 봅시다! → 14개~16개 실수를 줄여 봅시다! → 17개~19개 훌륭합니다!

● 학습 보충 계획:

우주의 신비 탐구에 이용되는 이차함수

인류의 문명과 과학 기술은 우리가 살고 있는 지구와 지구가 속해 있는 태양계에 대한 탐구는 물론이고, 전체 우주의 탄생과 역사의 신비를 밝히는 일을 가능하게 해 주고 있다.

여기서는 우주의 신비를 탐구하는 일에 이차함수가 어떻게 활용되는지 알아보자.

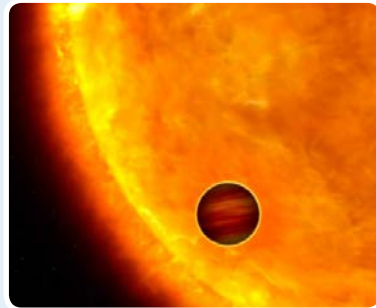
1 외계 행성의 수

태양계 바깥에서 별의 주위를 돌고 있는 행성을 '외계 행성(exoplanet)'이라고 부른다. 천문학자들이 과학 기술의 발전에 힘입어 외계 행성을 가속적으로 발견해 내고 있는데, 요즘은 지구보다 겨우 몇 배 정도 더 크거나 때로는 지구와 여러모로 비슷한 외계 행성이 발견되기도 한다.

▲ 외계 행성의 상상도

천문학자들은 1996년부터 12년 동안 발견한 외계 행성의 수를 2년 간격으로 조사한 자료를 바탕으로, 1996년부터 x년 후에 발견할 외계 행성의 수 $f(x)$를

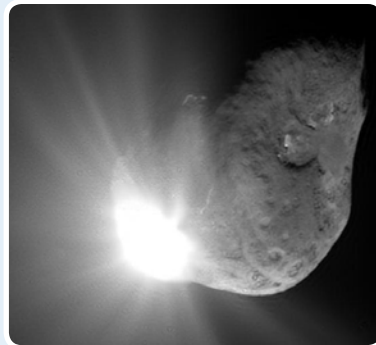
$$f(x)=0.2x^2+2.9x+5\text{(개)}$$

와 같은 이차함수로 나타내었다. 여기서 함숫값 $f(0)=5$는 1996년에 외계 행성이 5개 발견되었다는 뜻이다.

2 혜성이 뿜어내는 물의 양

여느 혜성처럼 'Tempel-1' 혜성도 태양 근처를 지날 때 온도가 상승하여 물을 뿜어낸다. 오른쪽 그림은 우주 탐사선 'Deep Impact'가 2005년 7월 4일 이 혜성의 핵에 370 kg의 충돌기를 부딪쳤을 때 가스와 먼지가 퍼져 나오는 것을 나타낸 것이다.

천문학자들은 이 혜성이 태양에 가장 근접한 지 x일 후에 1초당 뿜어내는 물의 양 $f(x)$를

$$f(x)=-0.0073x^2+0.15x+203\ \text{(kg)}$$

과 같은 이차함수로 나타내었다. 여기서 함숫값 $f(-100)=115$는 'Deep Impact'가 충돌기를 부딪치기 100일 전에 이 혜성이 1초당 115 kg의 물을 뿜어냈다는 뜻이다.

(출처: Odenwald, S., 『Algebra 2』)

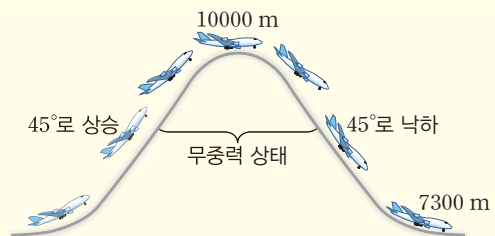
우주의 극한 환경에서 신체 건강을 어떻게 유지할 수 있을까요?

항공 우주 의학자는 우주 비행사 및 우주 관광을 목적으로 우주선에 탑승하는 일반인들의 건강 관리 등을 위해 우주 환경의 유해 자극이 인체에 미치는 영향을 체계적으로 연구하는 일을 합니다. 인체는 우주 환경에서 중력과 기압의 급격한 변화, 우주 방사선, 극심한 스트레스 등과 같은 극한의 환경 조건에 노출되어 근골격계, 심혈관계, 내분비계, 면역계 등에 여러 가지 급성 또는 만성 변화를 일으킬 수 있기 때문에 이에 대한 적절한 관리와 처방이 필요합니다.

과학 기술이 발달하면서 일반인들이 관광 목적으로 우주선에 탑승하는 이른바 우주 관광 시대가 열리게 되었습니다.

위성이 움직이는 궤도(500~1000 km)에서의 중력은 지구 중력의 백만분의 일 정도인데, 이를 '미세 중력(microgravity)'이라고 합니다. 인체가 미세 중력의 환경에 노출되면 중력 자극의 감소로 인해 근육이 위축되거나 뼈가 약해지는 신체의 변화를 가져올 수 있기 때문에, 우주 환경의 유해 자극이 인체에 미치는 영향을 체계적으로 연구하는 우주 생명 과학 분야의 연구가 필요합니다.

그런데 미세 중력의 영향을 알아보기 위해 매번 우주 비행을 하는 것은 불가능하므로, 지구 환경에서 미세 중력을 체험하기 위한 다른 방법을 찾아야 하는데 그중의 하나가 '포물선 비행(parabolic flight)'입니다. 포물선 비행의 원리는 비행기의 추진력으로 공기 저항에서 오는 속력 변화를 상쇄하여 순간적으로 미세 중력 상태가 된다는 것에 있습니다. 이때 비행기와 비행기 안에 있는 사람은 중력에 대항하는 힘이 없이 자유 낙하를 하게 되어 사람들은 비행기 안에서 무중력 상태를 경험하게 됩니다.

실제로, 항공기가 최대 엔진 출력으로 약 10 km의 고도까지 올라간 다음 중력 가속도와 동일한 속력으로 수직 강하하면 약 20~30초 동안의 포물선 비행을 통해 중력이 거의 없는 무중력 상태를 얻게 됩니다.

이와 같이 항공 우주 의학의 연구에 이차함수의 그래프인 포물선이 매우 중요하게 이용되고 있습니다.

(출처: 『사이언스온』, 2015년 4월 30일 / 김영효, 이주희, 유창경, 김현지, 김규성, 「의생명과학 분야의 우주 환경 연구를 위한 포물선 비행(Parabolic Flight)의 활용」)